Exercice 10 :

A) 1°/ Prouver que $\forall t \geq 0$, $0 \leq 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t} \leq \frac{t^3}{6}$.

2°/ En déduire $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2}$.

3°/ Soit $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

b) Prouver que $\forall t \geq 0$, $1 + t \leq e^t$, en déduire le signe de $g'(t)$.

c) Etudier ainsi les variations de g et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_g)$ représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°/ Prouver que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/a) Prouver que $\forall x \geq 0$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$.

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

3°/a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}(2x + 1 - (x+1)e^x)$

b) En utilisant **A)** 3°/ b), prouver que $\forall x > 0$, $f'(x) < 0$.

4°/ Etudier f et tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 11 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/a) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique Δ.

b) Etudier la position de (C) et Δ.